対称式・交代式（解説編）

設問　次の式の中から，対称式，交代式を選びなさい。また，どの文字についての対称式・交代式か答えなさい。

(ｱ)　$a^3+b^3+c^3$

(ｲ)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(ｳ)　$(x-a)(y-a)+(x-b)(y-b)+(x-c)(y-c)$

(ｴ)　$(b-c)(x-a)(y-a)+(c-a)(x-b)(y-b)+(a-b)(x-c)(y-c)$

(ｵ)　$a^2b+b^2c+c^2a$

(ｶ)　$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

(ｷ)　$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(ｸ)　$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

(ｹ)　$(ac+bd)^2+(ad+bc)^2+(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

〔解説〕

(ｱ)　$a,\ b,\ c$ についての対称式

(ｲ)　$a,\ b,\ c$ についての交代式

(ｳ)　$a,\ b,\ c$ についての対称式，$x,\ y$ についての対称式

(ｴ)　$a,\ b,\ c$ についての交代式，$x,\ y$ についての対称式

(ｵ)　該当しない。$a,\ b,\ c$ についての対称式でも交代式でもない。

(ｶ)　$a,\ b,\ c$ についての交代式

(ｷ)　$a,\ b,\ c$ についての対称式

(ｸ)　$x,\ y,\ z$ についての対称式

(ｹ)　$a,\ b$ についての対称式，$c,\ d$ についての対称式

演習　次の式を因数分解しなさい（簡単にしなさい）。

(1)　$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

(2)　$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$

(3)　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

(4)　$(b-c)(x-a)(y-a)+(c-a)(x-b)(y-b)+(a-b)(x-c)(y-c)$

(5)　$(a+b+c)^5-(a+b)^5-(b+c)^5-(c+a)^5+a^5+b^5+c^5$

〔略解〕

(1)　与式は，x, y, z についての 3 次同次対称式で，$x=-y$ を代入すると 0 となるから, $x+y$ で割り切れる。同様に，$y+z$ でも，$z+x$ でも割り切れる。

すなわち，$(x+y)(y+z)(z+x)$ で割り切れる。

よって，$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=A(x+y)(y+z)(z+x)$ （A は定数）とおけて，

$x=y=z=1$ を代入すると，$24=8A$ より $A=3$　　(与式)$=3(x+y)(y+z)(z+x)$

(2)　与式は，a, b, c についての 4 次同次交代式だから，その差積$(a-b)(b-c)(c-a)$ で割り切れて，その商は 1 次同次対称式である。よって，定数 A を用いて

$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)=A(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$　と表される。

ここで，$a=2, b=1, c=0$ を代入して，$-6=-6\mathrm{A}$　　$\therefore$　$\mathrm{A}=1$

よって，(与式)$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(3)　与式は，a, b, c についての 3 次同次対称式で，$a=0$ を代入すると 0 となるから，a で割り切れる。同様に b, c でも割り切れるから，abc で割り切れる。

よって，　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=\mathrm{A}abc$（$A$ は定数）

とおける。ここで，$a=b=c=1$ を代入すると，$24=A$

$\therefore$　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc$

(4)　与式は，a, b, c についての交代式で，x, y についての対称式である。

よって，与式は，a, b, c の差積$(a-b)(b-c)(c-a)$で割り切れる。

また，与式は，a, b, c, x, y の 3 次同次式だから,

$(b-c)(x-a)(y-a)+(c-a)(x-b)(y-b)+(a-b)(x-c)(y-c)=A(a-b)(b-c)(c-a)$

とおける。$x=y=0, a=2, b=1, c=0$ を代入して，$4-2=-2A$　　$\therefore$　$A=-1$

ゆえに，(与式)$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(5)　与式は，a, b, c についての 5 次同次対称式で，$a=0$ を代入すると 0 となるから，abc で割り切れて，その商は 2 次同次対称式である。

よって，定数 A，B を用いて

$$(a+b+c)^5-(a+b)^5-(b+c)^5-(c+a)^5+a^5+b^5+c^5$$
$$=abc\{A(a^2+b^2+c^2)+B(bc+ca+ab)\}$$

と表される。

ここで，$a=b=c=1$ と $a=2, b=1, c=-1$ をそれぞれ代入して，

$150=3A+3B$　$\cdots$①，　$-180=-2(6A-B)$　$\cdots$②

①，②を解いて，　$A=20$，$B=30$

(与式)$=10abc(2a^2+2b^2+2c^2+3bc+3ca+3ab)$